Quadrature公式提供两个必备的数据：在参考单元[0,1]d上的积分点位置，以及每个积分点的权重。

因为deal.II使用四边形或六面体，几乎所有积分公式都可以看作是由区间单元[0,1]上的一维积分公式的张量积生成的。然而，deal.II也提供了各向异性张量积Qanisotropic类(在某个坐标方向上的积分点比其他方向上的多)，以及不是张量积的积分公式。

**Use**

积分公式被用在求矩阵积分或右端项积分上。为此，在参考单元上定义的积分点必须要映射到实际网格上的对应位置上去，且权重也需要乘以雅可比矩阵的行列式。这一步骤是由Mapping基类的派生类来完成的，尽管这一过程常常是隐藏的，因为deal.II的许多部分都默认使用了MappingQ1类对象（如果没有特别指定积分公式的话）。

下一步是计算形函数及其导数在这些位置上的值。尽管FiniteElement基类提供了参考网格上的形函数描述，实际获取积分点处的形函数值及获取从mapping对象得到的信息并将两者结合起来这一工作是由FEValues类来完成的。因此，FEValues类提供的视角实际上是参考积分点(由Quadrature类提供)映射到实际空间网格(由Mapping类提供映射)对应位置处的有限元空间(由FiniteElement类定义)。

FEValues类顺带也提供了积分点映射到实际空间中对应的位置，可用于其他用途。例如，用于计算右端项函数在这些点处的值。

=============================================================================

**评注**：实际空间上的基函数的具体形态其实是不清楚的，它们是由参考单元上的基函数映射来的。虽然我们不知道其具体样子，但不妨碍我们的计算。因为我们知道，这样的基函数经过逆映射，回到参考单元后，它将退成为关于参考坐标ξ,η的函数，而其函数形式就是由FiniteElement类定义的基函数形式。在积分公式中虽然写的是，但实际上我们也不需要知道实际空间中积分点的坐标，需要的只是由Quadrature提供的参考单元上积分点位置，因为我们的积分是在参考单元上做的。故上面的应该换成。

**template<int dim>**

**class Quadrature<dim>**

任意维度积分公式的基类。这个类保存了单位线段[0, 1]，单位正方形[0, 1]x[0, 1]等的积分点及权重。

它有若干个派生类，表示了实体的积分公式。它们的名字以Q开头。高维格式通常是一维公式的张量积，参见下面具体实现细节。

**评注**：

一维积分公式(高斯-勒让德求积公式)：。n=2时有3个积分点。

二维积分公式(张量积)：，其中其实就是一维积分公式的各系数互相相乘得到的(即张量积)。n=2时有9个积分点。

**Mathematical background**

对于每个积分公式，我们用m来表示可以准确积分的多项式的最高次数。这个值在每个积分公式的文档中都给出了。积分误差的阶数是m+1，即，误差是网格尺寸的m+1次方量级(由Bramble-Hilbert引理)。对于最优公式QGauss，我们有m=2N-1，N代表QGauss的构造函数参数。张量积公式对于每个方向上是m次的张量积多项式是准确的，但它们的精度仍然是m+1阶的。

**Implementation details**

大多数高维的积分公式都是一维公式的张量积，或更一般地，是一个dim-1维公式和一个一维公式的张量积。有个特殊的构造函数可用于从另外两个积分公式生成新的积分公式。例如，QGauss<dim>公式包含了dim维空间中的Ndim个积分点，这里N是QGauss的构造参数。例如N=2时，对二维积分公式就有4个积分点，该积分对于2N-1=3次多项式是精确的。

**Qiterated**

这个类用于构造一个由已有的积分公式迭代而来的积分公式，因此可以在不增加阶数的情况下增加公式的精度。例如，通过迭代trapezoidal规则(点0和1，及权重1/2和1/2)两次，我们可以得到一个积分公式为点0,1/2和1，权重分别为1/4，1/2，和1/4。这个公式是通过把积分公式分别投影到子区间[0，1/2]和[1/2，1]上去，再把左区间的右端点和右区间的左端点融合起来得到的。

**Qanisotropic**

通常的多维积分公式是在每个方向上都相同的张量积，这个类则生成各方向上不同的张量积。

**QGauss**

用于数值积分的Gauss-Legendre积分公式。这些积分规则的系数按照Numerical Recipes书中的函数来计算。构造函数QGauss(const unsigned int n)， 生成有n个积分点(在每个方向上)的积分公式，对于次数为2n-1的多项式而言是精确的。

**QGaussLobatto**

用于数值积分的Gauss-Lobatto积分公式。可看作是对Gauss积分公式的改进，它用到了积分区间的两个端点。对于次数为2n-3的多项式是精确的，也就是说要劣两个次数。积分点是两个区间端点，外加n-1次Legendre多项式的导数的根。积分权重是2/(n(n-1)(Pn-1(xi)2))。构造函数QgaussLobatto(const unsigned int n)，生成在每个方向上有n个积分点的积分公式。

**QTrapez(梯形)**

用于数值积分的梯形公式。有两个积分点的这个公式对于线性多项式是精确的。